# Γραμμική Άλγεβρα Ι, Τμήμα Α-Κ, 10/2/2020

**Θέμα 1 (10 Μόρια)**

Έστω $A$ και $B$ δύο τετραγωνικοί πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής τους ισούται με ένα. Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία του γινομένου πληρούν τις ίδιες ιδιότητες.

**Θέμα 2 (20 Μόρια)**

Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $2n$ και $T\colon V \to V$ ενδομορφισμός. Αν για τους ενδομορφισμούς $T-I$ και $T-2I$ ισχύει ότι $\dim(T-I)(V) = \dim(T-2I)(V) = n$, τότε να αποδείξετε ότι $V = \ker(T-I) \oplus \ker(T-2I)$, όπου $I$ ο ταυτοτικός ενδομορφισμός.

**Θέμα 3 (15 Μόρια)**

Να υπολογίσετε το $\alpha$ ώστε το παρακάτω ομογενές σύστημα να έχει χώρο λύσεων διάστασης 2 και να βρεθεί το ευθύ συμπλήρωμα του χώρου των λύσεων.

$$\begin{gathered} 2x + (\alpha-1)y + (3-\alpha)w = 0 \\ x + (\alpha-2)y + (1-2\alpha)z + w = 0 \\ x + y + z + \alpha w = 0 \end{gathered}$$

**Θέμα 4 (15 Μόρια)**

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες $P$ και $Q$ έτσι ώστε $PAQ = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Οι πίνακες $P$ και $Q$ να εκφρασθούν ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

**Θέμα 5 (10 Μόρια)**

Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης $P$ από την κανονική βάση $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ στη βάση $\{(1,1,1),(1,1,-1),(1,0,0)$ και βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $P$ χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πίνακες.

**Θέμα 6 (20 Μόρια)**

Να βρεθεί ο ενδομορφισμός $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ώστε ο πυρήνας του να είναι ο υπόχωρος

$$Y = \{(x,y,z) : 2x + y - z = 0\}$$

και $T(1,0,0) = (1,2,3)$. Να βρεθούν οι πίνακες του $T$ ως προς την κανονική βάση και την $\{(1,1,1),(1,1,-1),(1,0,0)\}$. Πως συνδέονται οι συγκεκριμένοι πίνακες μεταξύ τους;

**Θέμα 7 (10 Μόρια)**

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x & a \\ a & a & a & \dots & a & x \end{pmatrix}$$

.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**